

# Mathematics

מבנים מתמטיקה

## תקציר שיעור גבול של פונקציה

### הגדרת הגבול

תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה  $x = x_0$ , פרט אולי לנקודה  $x_0$  עצמה. המספר  $L$

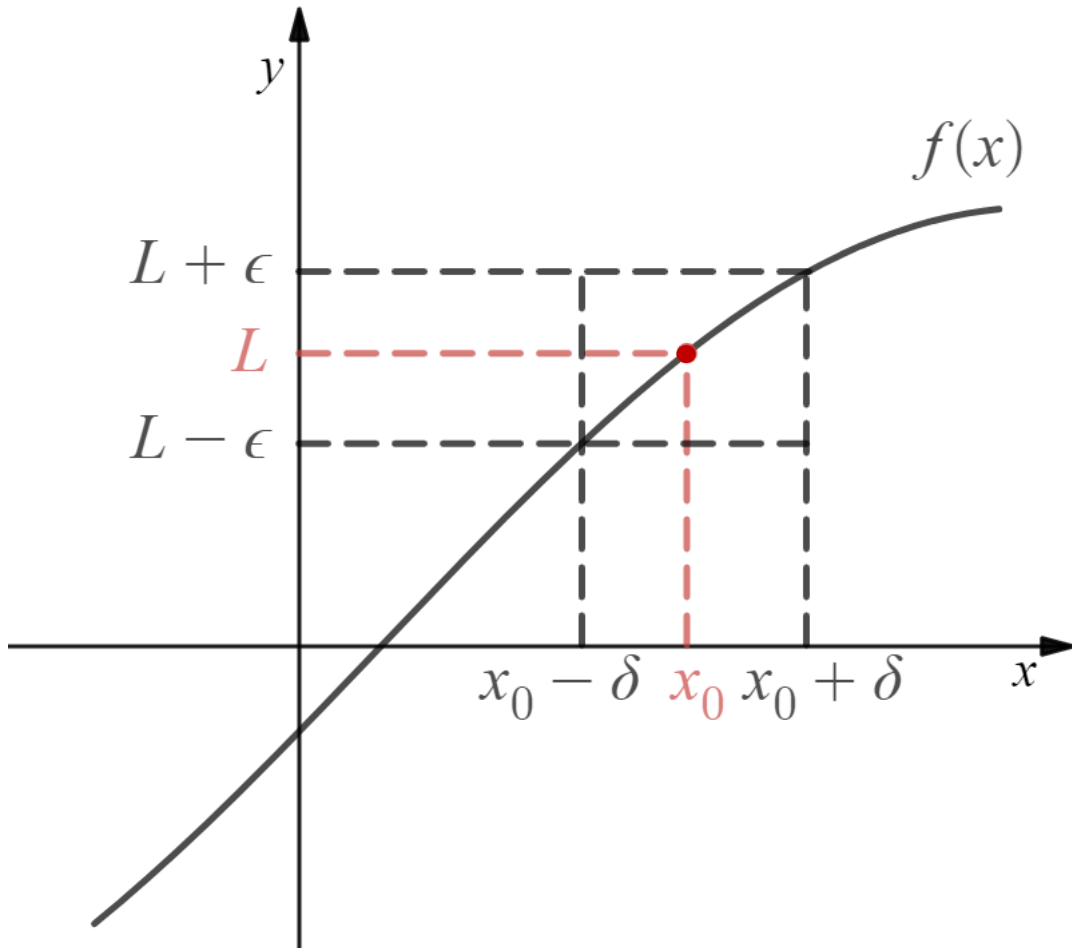
נקרא הגבול של  $f(x)$  כאשר  $x$  שואף ל- $x_0$ , אם לכל מספר  $\varepsilon > 0$  קיים מספר  $\delta > 0$  כך

שלכל  $x$  המקיים  $0 < |x - x_0| < \delta$ , מתקיים:  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

סימון:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  או בקצרה  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L$

### הגדרת הגבול בסימונים מתמטיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



## שלילת הגדרת הגבול

$L$  הוא לא הגבול של  $f(x)$ , אם קיים  $\varepsilon > 0$  כך שלכל  $\delta > 0$  קיים  $x$  המקיים  $0 < |x - x_0| < \delta$  כך ש:  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

## שלילת הגדרת הגבול בסימונים מתמטיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq L \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

## הגדרה

סביבה של הנקודה  $x_0$  היא הקטע הפתוח  $(a, b)$  המכיל את הנקודה  $x_0$ .

סביבה נקובה של נקודה  $x_0$  היא הקטע הפתוח  $(a, b)$  המכיל את הנקודה  $x_0$ , ללא  $x_0$  עצמה.

סביבת  $\delta$  של  $x_0$  היא הקטע הפתוח  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  לכל  $\delta > 0$ .

סביבת  $\delta$  נקובה של  $x_0$  היא הקטע הפתוח ללא  $x_0$  עצמה  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$  לכל  $\delta > 0$ .

## משפט – גבול של פונקציה אלמנטרית

הפונקציות האלמנטריות מקיימות בתחום הגדרתן, שהגבול בנקודה שווה לערך הפונקציה בנקודה,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ כלומר מתקיים:}$$

## משפט יחידות הגבול

אם לפונקציה קיים גבול, אזי הוא יחיד.

## משפטי גבול וערך מוחלט

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L| \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \quad (\text{ב})$$

## משפט חסומה כפול אפסה

אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  ו- $g(x)$  חסומה בסביבה נקובה של  $x_0$ , אזי:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ .

## משפט הסנדביץ'

אם לכל  $x$  בסביבה נקובה של  $x_0$  מתקיים:  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$   
 ואם בנוסף  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$  אזי  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

## משפט הגבול המפורסם

מתקיים הגבול הבא:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

## משפט – אריתמטיקה של גבולות

### חוקים בסיסיים

תהי פונקציה  $f$  המוגדרת בסביבת  $x_0$  (פרט אולי לנקודה  $x_0$  עצמה) ובעלת גבול סופי  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  ויהי קבוע  $c$  כלשהו, אזי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = cL \quad (\text{ב})$$

### חוקים עיקריים

תהיינה פונקציות  $f$  ו- $g$  המוגדרות בסביבת  $x_0$  (פרט אולי לנקודה  $x_0$  עצמה).  
 אם הגבולות הבאים קיימים וסופיים:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ , אזי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2 \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 L_2 \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (\text{ג}) \text{ אם גם } L_2 \neq 0 \text{, אזי:}$$

## משפט התכנסות גוררת חסימות

(א) אם קיים הגבול  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ , אזי  $f$  חסומה בסביבה נקובה של  $x_0$ .

(ב) אם קיים הגבול  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  ו**בנוסף**  $f$  מוגדרת ב- $x_0$ , אזי  $f$  חסומה בסביבת  $x_0$ .

## משפט – אי-שיויונות בין גבולות

### משפט 1

תהינה  $f$  ו- $g$  פונקציות המוגדרות בסביבה נקובה של  $x_0$

ונניח כי קיימים הגבולות:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ .

אם  $L > M$ , אזי יש סביבה נקובה של  $x_0$  שבה  $f(x) > g(x)$ .

### מסקנה ראשונה ( $g(x) = M$ )

בפרט אם  $g$  פונקציה קבועה  $g(x) = M$ , נקבל שאם  $L > M$ , אזי יש סביבה נקובה של  $x_0$

שבה  $f(x) > M$ .

### מסקנה שנייה ( $M = 0$ )

ובפרט אם  $M = 0$ , נקבל שאם  $L > 0$ , אזי יש סביבה נקובה של  $x_0$  שבה  $f(x) > 0$ .

### משפט 2

תהינה  $f$  ו- $g$  פונקציות המוגדרות בסביבה נקובה של  $x_0$

ונניח כי קיימים הגבולות:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ .

אם  $L \geq M$ , אזי לכל  $x$  בסביבה,  $f(x) \geq g(x)$ .

### מסקנה ראשונה ( $g(x) = M$ )

בפרט אם  $g$  פונקציה קבועה  $g(x) = M$ , נקבל שאם  $L \geq M$  לכל  $x$  בסביבה, אזי

$L \geq M$ .

### מסקנה שנייה ( $M = 0$ )

ובפרט אם  $M = 0$ , נקבל שאם  $L \geq 0$  לכל  $x$  בסביבה, אזי  $L \geq 0$ .